Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

PARTE 2: LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Tema 8: Razonamiento Semántico

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción a la lógica.

Componentes de la lógica proposicional

Lenguaje de primer orden
Alfabeto
Sintaxis
Términos
Predicados
Sustituciones

+

Semántica
Interpretación
Dominio de interpretación
Funciones de interpretación
Fórmulas abiertas y cerradas
Satisfacción
Consecuencia lógica

Razonamiento Semántico
Argumentos
Modelos
Contramodelos

Cáculo Deductivo
Teoría lógica
Sistema formal
Reglas de deducción natural
Reglas derivadas

Metalógica
Validez
Completud
Decibilidad

Conclusiones

Índice

1. **Razonamiento semántico en LPO.**

Validez y consecuencia lógica

Validez lógica

- Una fórmula $A \in L$ es **válida** (lógicamente válida) sii es verdadera en toda interpretación: $\models$ **A**
- **Sí es posible definir una interpretación que hace falsa la fórmula ⇨ La fórmula no es válida**

Consecuencia lógica

- Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1,\ldots,A_n\}$ ($A_i \in L$) y una fórmula $B \in L$, B es consecuencia lógica de Γ **($\Gamma \models B$)** sii:
  - Todo modelo de Γ es también modelo de B (toda interpretación que haga verdad a Γ también hace verdad a B)
  - No existe ninguna interpretación que haga verdad a Γ y que *no haga verdad* a B

Corrección de un argumento. Ejemplo 1

- Sea el argumento: *Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente.*
- Y su formalización: $\{ \exists x(I(x) \vee H(x)), \neg H(a) \} \vDash \neg I(a)$
- Para *determinar la corrección de este argumento por medios semánticos*, intentamos *encontrar un contramodelo*, es decir una interpretación que:
  1. Verifique las premisas: $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ y $i(\neg H(a)) = V$
  2. Haga falsa la pretendida conclusión: $i(\neg I(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. $D = \{ \text{Juan, Pedro} \}$
- Y ampliemos el lenguaje en el que hemos formalizado el argumento con una segunda constante: b
- La interpretación:
  1. $i(a) = \text{Juan}$, $i(b) = \text{Pedro}$
  2. $I_D(\text{Juan}) = V$, $I_D(\text{Pedro}) = V$, $H_D(\text{Juan}) = F$, $H_D(\text{Pedro}) = V$
- Verifica las premisas y hace falsa la conclusión, luego el argumento no es correcto.

Corrección de un argumento. Ejemplo 1

- Veamos en detalle la verificación de las premisas y falsificación de la conclusión:

1. $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ sii
   - $i((I(x) \vee H(x))\{x/c\}) = V$ para alguna constante 'c' de L.
   - Sea 'a' esa constante: $i(I(a) \vee H(a)) = V$ sii
   - $i(I(a)) = V$ o bien $i(H(a)) = V$
     - $i(I(a)) = V$ porque $i(a) = Juan$ y $I_D(Juan) = V$

2. $i(\neg H(a))) = V$ sii $i(H(a)) = F$
   - y lo es porque $i(a) = Juan$ y $H_D(Juan) = F$

3. $i(\neg I(a)) = F$ sii $i(I(a)) = V$
   - y lo es porque $i(a) = Juan$ y $I_D(Juan) = V$

Corrección de un argumento. Ejemplo 2

- Sea el argumento: *Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.*
- Y su formalización: $\{ \forall x(E(x) \to O(x) \vee R(x)), E(a) \wedge \neg O(a) \} \vDash R(a)$
- Para determinar la corrección de este argumento por medios semánticos, tratemos de encontrar un contramodelo que:
  1. Verifique las premisas: $i(\forall x(E(x) \to O(x) \vee R(x))) = V$ y $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$
  2. Haga falsa la pretendida conclusión: $i(R(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. D = { carbono, oxígeno }
- Ampliemos el lenguaje de formalización del argumento con una nueva constante: b
- La interpretación:
  1. i(a) = carbono, i(b) = oxígeno
  2. E_D(carbono) = E_D(oxígeno) = V, O_D(carbono) = F, O_D(oxígeno) = V, R_D(carbono) = R_D(oxígeno) = F
- No puede verificar las premisas y hacer falsa la conclusión:
  1. $i(\forall x(E(x) \to O(x) \vee R(x))) = V$ sii
     1. $i(E(a) \to O(a) \vee R(a)) = V$ sii **$i(E(a))=F$ o $i(O(a) \vee R(a))=V$**
     2. $i(E(b) \to O(b) \vee R(b)) = V$ sii $i(E(b))=F$ o $i(O(b) \vee R(b))=V$
  2. $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$ sii
     1. **$i(E(a))=V$** y **$i(O(a))=F$**
  3. $i(R(a)) = F$
- En realidad, lo que impide crear el contramodelo ***no depende de I***, luego **el argumento es correcto**.

Validez y consecuencia lógica. Ejercicios

Demostrar por medios semánticos:

1. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vDash Q(a)$
2. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vDash Q(a)$
3. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\} \vDash \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$
4. $\vDash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
5. $\vDash \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
6. $\vDash \exists x\forall yP(x,y) \rightarrow \forall y\exists xP(x,y)$
7. $\vDash \forall y\exists xP(x,y) \rightarrow \exists x\forall yP(x,y)$

Validez de argumentos. Ejercicios

Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:

1. *0 > 1. 1 > 2. La relación '>' es transitiva. Por tanto, 0 > 2.*
2. *Robin Hood es generoso. Todos los ladrones son generosos. Por tanto, Robin Hood es un ladrón.*
3. *Siempre que Pedro discute con María, ésta se enfada con su padre. Una persona que se enfade con otra no la invita a su boda. Por tanto, si Pedro discute con María, ésta no invitará a su padre a su boda.*
4. *Todos los ladrones son generosos. Sólo los ricos son generosos. Robin Hood es un ladrón. Por tanto, Robin Hood es rico.*
5. *Juan Carlos ama a Sofía. Quienes trabajan con Juan Carlos no conocen a fondo a Sofía. Si se ama a alguien, se le conoce a fondo. Sabino trabaja con Juan Carlos. Por tanto, Sabino no ama a Sofía.*
6. *Hay un ladrón generoso. Por tanto, hay un ladrón y hay alguien generoso.*
7. *Hay un ladrón y hay alguien generoso. Por tanto, hay un ladrón generoso.*

Validez de argumentos. Solución de ejercicios

Formalización y soluciones:

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x \forall y \forall z(M(x,y) \wedge M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \vDash M(a,c)$
2. $\{ G(a), \forall x(L(x) \rightarrow G(x)) \} \nvDash L(a)$
3. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow \neg i(x,y)) \} \vDash D(a,b) \rightarrow \neg i(b,f(b))$
4. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg G(x)), L(a) \} \vDash R(a)$
5. $\{ A(a,b), \forall x(T(x,a) \rightarrow \neg C(x,b)), \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow C(x,y)), T(c,a) \} \vDash \neg A(c,b)$
6. $\exists x(L(x) \wedge G(x)) \vDash \exists x L(x) \wedge \exists x G(x)$
7. $\exists x L(x) \wedge \exists x G(x) \nvDash \exists x(L(x) \wedge G(x))$